

#6

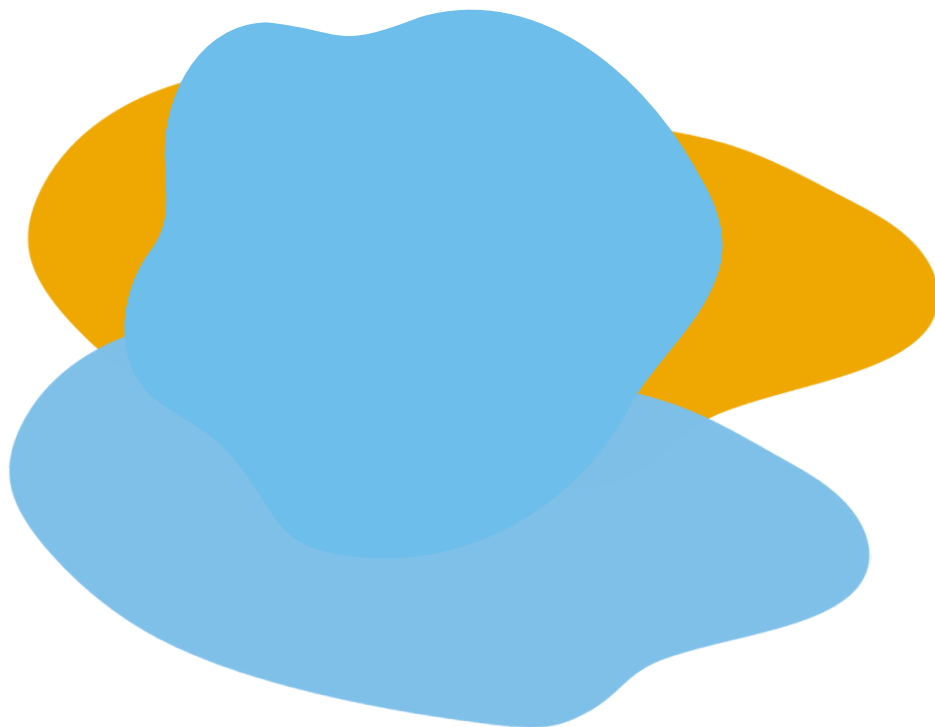
Rapportserien  
**FORSKNING & SKOLUTVECKLING**  
i samverkan

# Att främja matematisk dialog med hjälp av digitala verktyg

*Jens Ideland, Marie Sjöblom & Lisa Björklund  
Boistrup i samarbete med matematiklärare  
och skolledare på två grundskolor*

PEDAGOGISK  
INSPIRATION  
MALMÖ





NR 6 2024

FORSKNING & SKOLUTVECKLING i samverkan

Materialet publiceras via open access (öppen tillgång) under  
Creative Commons-licensen CC BY-NC-ND 4.0.

Distribution: Pedagogisk inspiration Malmö

Layout: Kristian Ingers, Pedagogisk inspiration, Malmö stad

Elektronisk version tillgänglig på: [www.pedagogmalmö.se](http://www.pedagogmalmö.se)

Bild framsida: Jens Ideland

# OM RAPPORTSERIEN

Pedagogisk Inspiration Malmö (Pi) är en gemensam utvecklingsenhet för Förskoleförvaltningen, Grundskoleförvaltningen och Gymnasie- och vuxenutbildningsförvaltningen i Malmö stad. En av enhetens centrala uppgifter är att stärka skolverksamheternas vetenskapliga bas och förmåga att använda forskning och vetenskapliga metoder, samt att utveckla ett nära samarbete mellan skolverksamheter, forskare och lärosäten rörande forskning om, för och med förskolor och skolor.

I rapportserien *Forskning och skolutveckling i samverkan* samlas texter och rapporter från projekt och undersökningar som genomförts av, eller i samarbete med, de forskare och forskarutbildade lärare som arbetar som vetenskapliga utvecklingsledare på Pedagogisk inspiration Malmö. Texterna bygger på forskning och vetenskapliga metoder men har ofta skrivits i samarbete med exempelvis pedagogisk personal, skolledare eller externa forskare från lärosäten och kan därför ha olika karaktär. I serien finns utrymme för bland annat rapporter från forskningsbaserade skolutvecklingsprojekt, undersökningar och analyser riktade mot skolverksamheter samt vetenskapliga artiklar.

Detta sjätte nummer presenterar och diskuterar resultat från ett samarbetsprojekt där matematiklärare och forskare undersökt möjligheterna att utveckla en matematikundervisning där digitala verktyg används för att främja matematisk dialog. Texten bygger på resultat och analyser som presenterats i en vetenskaplig publicerad artikel (Sjöblom m.fl., 2024). Den här rapporten lyfter och resonerar friare kring några resultat från artikeln som bör vara intressanta för exempelvis matematiklärare, de som arbetar med skolutveckling och digitala verktyg samt skolledare som leder skolutvecklingsprocesser inom liknande områden. Rapporten har inte genomgått den granskning av externa forskare som är kutym för forskningspublikationer. Andra resultat från projektet kan komma att publiceras och genomgå sådan granskning längre fram.

*Nyckelord: Matematikundervisning, matematisk dialog, digitala verktyg, dynamiska matematikverktyg, GeoGebra, undervisningsutveckling.*







Jens Ideland är vetenskaplig utvecklingsledare på Pedagogisk inspiration Malmö och fil.dr i tillämpad IT med inriktning mot utbildningsvetenskap samt fil.lic. i musikpedagogik. I sin forskning är Jens bland annat intresserad av hur digitala verktyg används och påverkar interaktion och lärande i aktiviteter och undervisning.

Marie Sjöblom är lektor i matematikens didaktik vid Malmö universitet. Hennes forskning fokuserar på matematisk dialog, till exempel gällande användning av matematiska frågor. Marie gör just nu en postdoc med inriktning skolnära forskning, där hon är intresserad av processer i vilka forskare och lärare forskar tillsammans.

Lisa Björklund Boistrup är professor i matematikens didaktik vid Malmö universitet. Lisa har ett brett matematikdidaktiskt forskningsintresse och har stor erfarenhet av att forska tillsammans med lärare, bland annat gällande kritiska perspektiv på bedömning i matematik, matematik kopplat till andra ämnen (såsom yrkesämnen på gymnasiet), samt hållbar digitalisering.



# INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	<b>SAMMANFATTNING</b>	<b>5</b>
	<b>BAKGRUND TILL PROJEKT</b>	<b>6</b>
	• Några utgångspunkter i forskning och litteratur	8
	<b>METOD OCH GENOMFÖRANDE</b>	<b>10</b>
	• Arbetsgång	10
	<b>RESULTAT</b>	<b>11</b>
	• Vad hamnar i förgrunden eller bakgrunden i undervisningen?	11
	• Vad och vem inkluderas eller exkluderas i undervisningen?	14
	<b>DISKUSSION OCH REFLEKTION</b>	<b>15</b>
	<b>REFERENSER</b>	<b>19</b>



## SAMMANFATTNING

Denna text presenterar resultat och erfarenheter från ett projekt där lärare och skolledare från två av Malmö stads grundskolor med högstadium samarbetat med forskare från Malmö stad (Pedagogisk inspiration Malmö) och Malmö universitet. I projektet har de gemensamt undersökt möjligheterna att utveckla en matematikundervisning där det dynamiska och digitala matematikverktyget GeoGebra används för att främja elevers lärande och delaktighet i matematisk dialog. Projektet pekar mot att det, med ett lämpligt upplägg, är möjligt att få till stånd en sådan undervisning. Resultaten synliggör samtidigt att det finns en risk att de matematiska aspekterna hamnar i skymundan när elever och lärare börjar använda ett digitalt verktyg som de inte känner väl sedan tidigare. Resultatdelen i denna text bygger på analyser från en vetenskaplig publikation (Sjöblom m.fl., 2024) som skrivits inom ramen för projektet. Fokus riktas mot

- vad som hamnar i förgrunden eller bakgrunden i undervisningen samt
- vad och vem som inkluderas eller exkluderas i undervisningen.

I den avslutande delen förs ett resonemang om vad resultaten kan betyda för lärare, skolledare och andra som arbetar för att introducera nya digitala verktyg och främja elevers dialog i matematikundervisningen eller andra ämnen. Resultaten och erfarenheterna från projektet pekar mot att det är viktigt att vara medveten om att

- tydligheten i den pedagogiska idén och det didaktiska upplägget blir viktig,
- digitala verktyg behöver ses som en del av hela lärandemiljön,
- nya verktyg utmanar den etablerade undervisningspraktiken,
- förändringar i undervisningspraktiken förutsätter lärande samt att
- samarbeten kan stärka skolans beprövade erfarenhet och vetenskapliga grund.

# ATT FRÄMJA MATEMATISK DIALOG MED HJÄLP AV DIGITALA VERKTYG

## Ett samverkansprojekt för att synliggöra möjligheter och utmaningar när dynamiska matematikverktyg introduceras i undervisningen

Jens Ideland från Pedagogisk inspiration Malmö (Pi) och Marie Sjöblom samt Lisa Björklund Boistrup från Malmö universitet i samarbete med matematiklärare och skolledare från två grundskolor i Malmö stad.

## BAKGRUND

I denna text presenteras resultat och reflektioner från ett samarbetsprojekt där matematiklärare och forskare undersökt möjligheterna att utveckla en matematikundervisning där digitala verktyg används för att främja likvärdiga lärandemöjligheter och delaktighet i matematisk dialog. Enkelt uttryckt handlar projektet om att utveckla och testa en undervisning för högstadiееlever där de arbetar och samtalar i grupp med stöd av det dynamiska matematikverktyget GeoGebra – och att lära av denna utvecklingsprocess. Här ges först en bakgrund till projektet och syftet med denna text. Sedan följer en kortare presentation av projektets utgångspunkter i litteratur och forskning.

Matematikämnet ska erbjuda elever möjligheter att utveckla kunskaper i att använda digitala verktyg för att undersöka problemställningar och matematiska begrepp (Skolverket, 2022a). I senare delar av matematikundervisningen förväntas elever kunna hantera och använda sig av digitala och interaktiva matematikverktyg (Skolverket, 2022b) som exempelvis GeoGebra (Hohenwarter, 2024). De nationella proven i matematik kommer också att genomföras i digital form från årskurs 6 och i gymnasiet är det tänkt att eleverna ska kunna använda sig av verktyg som liknar GeoGebra i vissa delar av proven. Skolverket poängterar att det därför är viktigt att eleverna får vänja sig vid sådana verktyg (Skolverket, 29 maj 2024), men betonar att digitala verktyg i undervisningen ska användas på ett sätt som stärker elevernas lärande (Skolverket, 2022a). Att kunna hantera digitala verktyg som GeoGebra blir på så sätt en viktig del i elevernas ämneslitteracitet (Nygård Larsson m.fl., 2022), inte minst i relation till deras förmåga att

**GeoGebra** (GG) är ett gratis digitalt verktyg för matematik som kan användas för att rita grafer och undersöka formler, geometriska figurer, diagram med mera. Verktyget erbjuder även en rad resurser för undervisning och lärande, som interaktiva arbetsblad, simuleringar och visualiseringar. Se <https://www.geogebra.org>

delta, förstå, utföra meningsfulla handlingar och uttrycka sitt kunnande i matematikundervisningen och provsituationer samt att använda sådana verktyg utanför skolkontexten.

Forskning pekar mot att digitala verktyg erbjuder matematiklärare en större repertoar av möjligheter att representera, visualisera och stimulera elevernas undersökande arbete i matematik (ex. Markkanen, 2021). Digitaliseringen av skolan ställer samtidigt lärare inför olika dilemmaområden, exempelvis rörande vad som ska inkluderas och räknas som viktigt innehåll och kunnande i deras ämnen (Godhe m.fl., 2023) och en del forskare och debattörer problematiserar användningen av digitala verktyg i undervisningen. En farhåga har varit att satsningar på datorer till alla elever kan leda till ett ökat ensamarbete och att eleverna riskerar att gå miste om möjligheter till interaktion och lärande (ex. Grönlund, 2014; Skolverket, 2018; Wennås Brante & Godhe, 2021).

Ensamarbete med digitala verktyg kan ses som problematiskt i relation till att forskning visat att samtal om matematik och matematiska problem i mindre grupper är en viktig komponent för elevers lärande och utveckling av matematiska förmågor. I den matematiska dialogen (Hennessy m.fl., 2021; Sjöblom 2022) kan elever uttrycka, pröva och utveckla sin matematiska förståelse tillsammans med andra. Samtidigt är det inte självklart att elevers samtal hamnar rätt och fokuserar på relevanta matematiska aspekter (Fuentes, 2009). Men genom att lyssna in elevernas samtal och ställa rätt frågor kan lärare rikta elevernas dialog mot matematiska problem och utmaningar som bidrar till deras utveckling och lärande (Sjöblom, 2022).

Ett grundantagande i det projekt som presenteras i denna text har varit att arbetet med digitala verktyg och matematisk dialog kan kombineras och stärka varandra – med ett lämpligt undervisningsupplägg. Forskning har samtidigt synliggjort att det ofta uppstår nya utmaningar när digitala verktyg förs in i undervisningen (ex. Willermark, 2018) och att det inte räcker med att lärare och elever lär sig att hantera digitala verktyg och resurser i sig. Exempelvis behöver matematiklärare använda sitt kunnande om ämnet samt sin pedagogiska och didaktiska skicklighet för att de digitala verktygen ska kunna föras in och användas på ett sätt som bidrar till elevernas lärande och utveckling (Bueno m.fl., 2021; Mishra & Koehler, 2006).

I denna text presenteras resultat och reflektioner från ett forskningsprojekt där syftet varit att undersöka hur lärare, skolutvecklare och forskare tillsammans kan skapa en hållbar matematikundervisning, genom att främja likvärdiga lärandemöjligheter och delaktighet i matematisk dialog med hjälp av digitala verktyg. Mer konkret handlar det om att utveckla och testa undervisningsupplägg där GeoGebra används för att skapa uppgifter och läraaktiviteter som stimulerar till matematisk dialog och lärande – och att genom denna process synliggöra vilka möjligheter och utmaningar som uppstår för både elever och lärare.

Projektet har varit ett samarbete mellan forskare från två miljöer, Malmö universitet och Pedagogisk inspiration Malmö, samt ett tjugotal matematiklärare och deras skolledare från två kommunala skolor med högstadium i Malmö. Samarbetet har bedrivits som ett praktiktäna forskningsprojekt där alla deltagare ses som experter inom sina respektive områden och bidrar till processen, lärandet och resultaten (McKenney & Reeves, 2014) men kan ha ansvar för olika delar av arbetet och processen. Ett så pass stort projekt och samarbete där gruppen träffades regelbundet under tre terminer har resulterat i ett stort material och många lärdomar. Den här texten bygger på en vetenskaplig publikation (Sjöblom m.fl., 2024) som i första hand riktar sig till forskare och lärarutbildare. Syftet med denna text är att lyfta fram och resonera kring några resultat (från den vetenskapliga publikationen) som vi tror är intressanta, till exempel för dem som undervisar i matematik eller arbetar med skolutveckling och digitala verktyg samt skolledare som leder sådana skolutvecklingsprocesser. Resultatdelen sammanfattar analyser och resultat som presenterats i den vetenskapliga publikationen (Sjöblom m.fl., 2024). I den avslutande diskussions- och reflektionsdelen resonerar vi friare om vad dessa analyser och resultat kan betyda för lärare och skolverksamheter.

### **Några utgångspunkter i forskning och litteratur**

Forskning som visat hur viktig matematisk dialog är för matematikundervisningen har varit central för projektet. I matematikundervisningen förväntas eleverna utveckla sin förmåga att resonera och kommunicera kring matematik och matematiska begrepp (Skolverket, 2022a). Forskare har visat att samtal i smågrupper är viktigt för elevernas lärande (Alexander, 2020), bland annat därför att det stimulerar till delaktighet och ger eleverna möjlighet att resonera och lära sig uttrycka sitt matematiska kunnande mer explicit (Hennessy m.fl., 2021). Arbeta och samtal i smågrupper kan dock leda fel. Sjöblom (2022) har visat att de uppgifter eller frågor som eleverna arbetar med behöver vara väl genomtänkta och rikta elevernas uppmärksamhet mot ett matematiskt problem. Lärarna behöver också lyssna in elevernas dialog och ställa frågor som riktar samtalet mot relevanta aspekter av problemet om dialogen går i fel riktning. Vissa forskare menar att digitala verktyg riskerar att störa och hindra elevers matematiska resonemang (Bach & Bikner-Ahsbals, 2022). Detta pekar på vikten av att planera och genomföra aktiviteter med digitala verktyg i matematikundervisningen, så att elevers matematiska dialog kan understödjas. Här behövs mer forskning.

En teoretisk utgångspunkt för projektet har varit att människor skapar och designar mening och meningsfulla handlingar i ett socialt och materiellt sammanhang (Kress, 2010; Selander, 2022). Vi människor använder de verktyg och resurser vi har tillgång till i en viss situation för att handla och uttrycka oss. Olika verktyg och resurser erbjuder olika möjligheter att designa och skapa handlingar eller produkter där vi använder och uttrycker kunnande. Att exempelvis arbeta med geometriska figurer kräver och synliggör delvis olika förmågor och kunnande när elever bygger fysiska modeller, ritar på papper med penna och linjal eller använder ett digitalt verktyg som GeoGebra.



Med andra ord uppstår det ofta en form av översättningsfenomen (jmf. translation, Kress, 2010) när vi använder nya verktyg och resurser eller kombinerar dem på ett nytt sätt. Hur vi använder oss av verktyg och resurser i olika sammanhang utvecklas över tid till de rutiner och vanor som är en viktig del av praktiker och praktikgemenskaper (Kemmis m.fl., 2014). Vi människor agerar i förhållande till de mönster och förväntningar som arbetats in i de praktiker vi engagerar oss i. En konsekvens av detta är att nya verktyg som erbjuder andra möjligheter och begränsningar än vi är vana vid (exempelvis GeoGebra) ofta utsätter praktiken, och de som deltar i den, för nya utmaningar och att det kan uppstå spänningar (Ideland, 2020).

Praktiker är ett begrepp som används för att beskriva olika former av socialt etablerade mänskliga aktiviteter (Kemmis m.fl., 2014) på olika nivåer, från rutinartade praktiker kring enskilda moment och verktyg till större praktikersystem. Skolpraktiken är exempelvis i själva verket ett helt system som består av flera olika delpraktiker som hänger ihop och påverkar varandra (Kemmis m.fl., 2014). Projektet som beskrivs i den här texten berör också flera praktiker, exempelvis elevernas lärandepraktik, lärarnas undervisningspraktik, skolledarnas skollärandepraktik och forskarnas forskningspraktik.

Genom projektet skapas en möjlighet för lärare och forskare att mötas i en delvis ny praktik där vi hjälps åt att förstå, utveckla och dra lärdomar av vad som händer i klassrummet och elevernas lärandepraktik när digitala verktyg används för att stötta matematisk dialog. För att kunna analysera och resonera mer detaljerat om undervisnings- och klassrumspraktiken i matematik har vi i projektet bland annat använt termerna *praxis* och *logos* (Chevallard, 2006). Något förenklat handlar *praxis* om hur något bör göras (ex. metoder för att ta sig an olika uppgifter) medan *logos* handlar om den mer teoretiska förståelsen kring varför det bör göras på ett visst sätt. Båda sidorna behövs och är centrala i matematikundervisningen och elevernas lärande. I nästa del beskrivs hur projektet och undersökningen som ligger till grund för de resultat som presenteras längre fram i rapporten har genomförts.

# METOD OCH GENOMFÖRANDE

En viktig inspirationskälla för genomförandet av projektet har varit Educational Design Research (EDR) (McKenney & Reeves, 2014). I EDR-projekt behöver lärare och forskare samarbeta och se varandra som experter som bidrar med kompetenser inom sina respektive områden. Genom att arbeta i iterativa cykler där lärarna bidrar med kunskaper om sin undervisning och sina elever och forskarna bidrar med kunskaper om forskning och forskningsmetoder kan samarbeten mellan lärare och forskare bidra till både nytt kunskaper (forskning) och nya upplägg och undervisningsmetoder (skolutveckling) på vetenskaplig grund. Något förenklat går de iterativa cyklerna ofta ut på att deltagarna använder tidigare erfarenheter och forskning för att designa ett undervisningsupplägg som sedan genomförs och testas i en eller flera klasser. Lärare och forskare hjälps åt att dokumentera och analysera hur undervisningsupplägget faller ut för berörda klasser och elever. De nya lärdomarna ligger sedan till grund för arbetet med nästa cykel och ger en ökad förståelse för de processer som pågår i undervisningen (McKenney & Reeves, 2014).

## Arbetsgång

För att utveckla och undersöka vad som kännetecknar en matematikundervisning som främjar likvärdiga lärandemöjligheter och delaktighet i matematisk dialog med hjälp av digitala verktyg, har vi i det här projektet genomfört tre utvecklingscykler. I varje cykel planerade deltagarna två olika lektionsupplägg för högstadiets matematikundervisning, ett för varje skola. Gemensamt för uppläggen var att eleverna skulle arbeta i små grupper med uppgifter där de använde programvaran GeoGebra på en Chromebook. Dessa upplägg genomfördes och testades sedan i några klasser på respektive skola. Forskarna (från MAU och Pi) dokumenterade undervisningen och elevernas arbete i ett par klassrum på varje skola med video och ljudupptagning. Materialet som analyserats består endast av datainsamling från de lärare och elever som gett sitt skriftliga samtycke till deltagande i forskningsprojektet. Projektet följer etiska riktlinjer för forskning och upplägget har granskats av etikprövningsmyndigheten. Efter datainsamlingen gjorde forskarna en första översiktlig analys av materialet och valde ut klipp som var intressanta och lämpliga att diskutera och analysera vidare tillsammans med lärarna. Lärarna tittade på, diskuterade och analyserade klipp från sin egen skola och presenterade sedan klipp och diskuterade vad de kommit fram till med hela gruppen. Projektet och de tre cyklerna pågick under tre terminer. Nu återstår arbete med fördjupad analys och spridning, varav denna text är en del.

I resultatdelen (nästa del) sammanfattas några intressanta aspekter och analyser som forskarna gått vidare med och presenterat på en matematikdidaktisk konferens och i en vetenskaplig publikation med titeln *Tensions in combining two practices: promoting mathematical dialogue using digital tools* (Sjöblom m.fl., 2024). För att undvika missförstånd bör det påpekas att GeoGebra här benämns som app och Chromebook som dator för att förenkla texten, även om det kan diskuteras om detta är helt korrekt.

# RESULTAT

Analyserna bekräftar att digitala verktyg som GeoGebra erbjuder lärare och elever en rad ganska avancerade möjligheter och funktioner. Appen underlättar matematiska beräkningar och visualiseringar som är svåra eller tidskrävande att utföra utan ett digitalt verktyg. Samtidigt visar både elevernas agerande och lärarnas och forskarnas diskussioner om undervisningen att det inte är helt oproblematiskt att föra in ett nytt och kraftfullt matematikverktyg i undervisningen. Här tittar vi vidare på två dilemman som kan uppstå när matematiklärare på högstadiet för in GeoGebra i undervisningen.

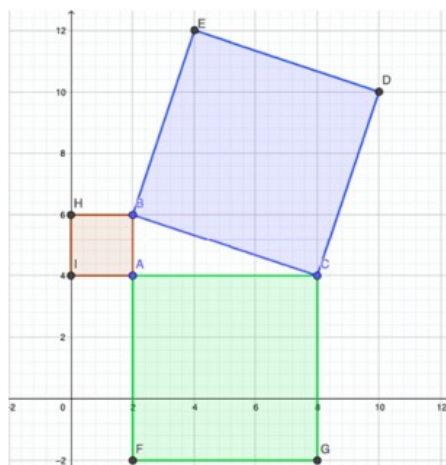
## **Vad hamnar i förgrunden eller bakgrunden i undervisningen?**

Ett område som väckt lärarnas och forskarnas intresse är vad som hamnar i förgrunden och får fokus i undervisningen och vad som hamnar i bakgrunden och inte får lika mycket uppmärksamhet. Redan i cykel 1 var avsikten att de uppgifter eleverna arbetade med i GeoGebra skulle stimulera en matematisk dialog med fokus på matematiska begrepp och problemlösningsprocesser. Analysen visar dock att det nya verktyget (GeoGebra) fick mycket uppmärksamhet och ofta hamnade i förgrunden. Eftersom appen var helt ny för eleverna valde lärarna att lägga en stor del av introduktionen till sina lektioner på att förklara viktiga funktioner i GeoGebra och hur eleverna skulle hantera dem för att klara den aktuella uppgiften. Uppgifterna som lärarna valt ut var ofta relativt enkla rent matematiskt, exempelvis att eleverna skulle använda appen för att sätta ut koordinater och skapa geometriska figurer i ett koordinatsystem eller ordna tal uttryckta i olika former (ex 0,25,  $\frac{1}{5}$  och 50%) i storleksordning.

Elevernas diskussioner och frågor till lärarna när de arbetade med GeoGebra handlade i hög grad om själva appen och hur den skulle hanteras, medan de matematiska frågorna och begreppen som fanns i uppgifterna ofta fick relativt liten uppmärksamhet. Sammanfattningsvis synliggjorde materialet från cykel 1 att introduktionen av det digitala verktyget initialt resulterade i att undervisningen ofta fick ett ökat fokus på praxis, men då inte i matematik utan avseende hur själva appen skulle hanteras.

De situationer där matematiken hamnade i fokus under cykel 1 uppstod ofta när lärarna ställde frågor kring uppgifterna som fick eleverna att fokusera och diskutera det matematiska innehållet, i stället för appens olika funktioner. Ett intressant exempel är en situation där eleverna placerade två trianglar på varandra så att de bildade en stjärna. De förväntade sig att den formel för trianglarnas area som de skrivit in i GeoGebra nu skulle visa stjärnans area, men i stället räknades trianglarnas överlappande area två gånger. Elevernas oreflekterade användning av GeoGebra resulterade alltså i att de kom fram till ett felaktigt svar, vilket läraren kunde utnyttja och plocka upp i en helklassdiskussion om hur eleverna behövde resonera för att förstå matematiken i uppgiften och använda det digitala verktyget för att lösa uppgiften.

En annan lärare använde sig av en färdig simulering som utnyttjade GeoGebras möjligheter att visualisera matematiska fenomen. I stället för att arbeta med en uppgift där de skulle komma fram till ett visst svar arbetade eleverna med en visualisering av Pythagoras sats (se Figur 1) där de kunde dra i hörnpunkterna A, B och C på en triangel och jämföra areorna för kvadraterna på sidorna.



Figur 1: Interaktiv visualisering av Pythagoras sats i GeoGebra.

Att eleverna fick arbeta med en färdig visualisering som de enkelt kunde experimentera med, och att uppgiften handlade om sambandet mellan den rätvinkliga triangeln och kvadraternas areor, tycks ha bidragit till att elevernas dialoger riktades mot det matematiska innehållet snarare än det digitala verktyget i sig – att matematikens logos fick en mer framträdande plats. Eftersom eleverna redan kunde använda sig av Pythagoras sats handlade uppgiften och elevernas dialog dock snarare om att befästa matematiskt kunnande än att upptäcka och lära sig något nytt. I den avslutande helklassdiskussionen blev det snarare GeoGebras möjligheter som framstod som intressanta och hamnade i förgrunden.

Erfarenheterna från cykel 1 bidrog till att lärarna i cykel 2 och 3 använde eller skapade uppgifter med ett tydligare fokus på matematiska problem som eleverna kunde undersöka och lösa med hjälp av GeoGebra. En lektionsaktivitet i cykel 2 handlade om en resa längs en viss väg, där eleverna kunde ta pauser eller röra sig i olika hastigheter, men där de alla nådde destinationen vid en viss tidpunkt. Idén var att de, genom att rita in grafen för resan i GeoGebra, skulle få hjälp att dra slutsatsen att oavsett vad som hände under resan, skulle medelhastigheten vara densamma, så länge samma sträcka avverkades på samma tid. En annan lektionsaktivitet fokuserade på hur arean och volymen av en cylinder kan relateras och beräknas. Lärarna använde en färdig simulering i GeoGebra där eleverna kunde "skära upp" en cylinder och sprida ut de olika ytorna för att se hur cylinderns area bestod av två cirklar och en rektangel. Med hjälp av en så kallad glidare i GeoGebra, kunde elever dra i reglage för att ändra höjden och radien på cylindern och se hur dessa förändringar påverkade arean och volymen. Eleverna fick i uppgift att räkna ut hur de bäst skulle utnyttja en tänkt plåtbit med vissa mått för att tillverka en burk med så stor volym som möjligt.

Sådana utforskande uppgifter, i kombination med att lärarna var mer förberedda på att ställa frågor för att rikta elevernas uppmärksamhet mot det matematiska innehållet, är två aspekter som enligt analysen bidrog till ett ökat fokus på det matematiska innehållet i läraaktiviteterna. En aspekt som inte bör underskattas i sammanhanget är att elever och lärare i cykel 2 hunnit bli lite mer vana vid själva appen. Samtidigt blev det också tydligt att de digitala verktygen kan föra med sig begränsningar som påverkar lektionsaktiviteten och elevernas agerande. Det visade sig exempelvis att den färdiga simuleringen av en cylinders yta och volym som användes inte fungerade för måtten i den uppgift som var tänkt att eleverna skulle lösa.

I materialet finns det också situationer där eleverna inte agerade eller deltog i en matematisk dialog som förväntat. En del elever fokuserade på att testa sig fram i GeoGebra för att så snabbt som möjlig hitta rätt lösning, snarare än att diskutera och resonera om vad och varför de borde göra på ett visst sätt. När eleverna tog sig an uppgifterna på detta sätt fick matematikens logos inte någon framträdande plats i aktiviteten. Det finns även flera exempel på situationer där elever arbetade med att lösa uppgiften och det matematiska problemet tillsammans, men utan prata särskilt mycket. I stället för en muntlig matematisk dialog där de använde och uttryckte sina matematiska resonemang i ord och matematiska termer pekade dessa elever på skärmen eller använder gester och muspekaren för att "resonera" och kommunicera om hur de ska gå vidare och ta sig an uppgiften med hjälp av GeoGebra. I denna tysta dialog och interaktion använde och uttryckte de matematiskt kunnande, men inte med verbala resonemang och matematiska begrepp.

### **Vad och vem inkluderas eller exkluderas i undervisningen?**

Analyserna av materialet synliggör att den praktiska organisationen av undervisningen och lärandeaktiviteter får konsekvenser för elevernas möjligheter till interaktion och lärande.

Med inspiration från tidigare studier om matematisk dialog (Alexander, 2020; Sjöblom, 2022) delades eleverna i cykel 1 (med några få undantag) in i grupper om tre. De tre eleverna skulle samarbeta kring en dator för att lösa uppgiften i GeoGebra. Tanken med detta var att grupperna skulle vara så pass stora att elever skulle kunna bidra med olika kunnande och perspektiv i dialogen, och samtidigt undvika att grupperna blev så stora att vissa elever inte skulle kunna se skärmen eller få utrymme att delta i dialogen. Analysen visade dock att den fysiska placeringen i rummet och vems dator som användes kunde få oönskade konsekvenser för interaktionen och samarbetet i grupperna.



Tanken var att alla elever skulle delta i aktiviteten på lika villkor, men i realiteten blev det ofta så att den elev vars dator gruppen använde fick ett större inflytande och kontroll över GeoGebra och de digitala resurserna i aktiviteten. När eleven som ägde datorn inte satt i mitten eller såg till att de andra kunde se skärmen hände det att andra elever fick svårt att se och prata om vad som hände i det digitala verktyget. Om eleven som hade kontroll över datorn inte bjöd in till dialog kunde det därför uppstå situationer där andra elever exkluderades nästan helt och fick svårt att delta i läraaktiviteten – även när de försökte signalera att de ville engagera sig och kunde bidra till att lösa uppgiften.

I cykel 2 ändrades därför upplägget så att eleverna, med några få undantag, arbetade i par. Några använde varsin dator, men i de flesta fall samsades paret om en dator. Även om det i cykel 2 fortfarande var den elev som äger datorn som oftast har störst kontroll över GeoGebra visar analysen att interaktionen och samarbetet kring det digitala verktyget tycks bli enklare och mer jämbördigt när eleverna jobbar i par runt en dator. Ett exempel är att den tysta dialog som nämnts ovan underlättas när båda deltagarna kan se, peka och enkelt komma åt att använda muspekaren, tangentbord och kommandon för att visa och testa sina idéer och tankar om hur man ska gå vidare i GeoGebra. En mindre positiv aspekt med en sådan tyst interaktion kring datorn är att incitamentet och drivkraften att uttrycka matematiska resonemang och idéer med ord och matematiska termer riskerar att bli svagare. I materialet finns det också några få elever som gör tvärt om och väljer att inte använda sig av GeoGebra. I stället löser de uppgifterna med hjälp av penna, papper och de enklare miniräknare som de har tillgång till i sina mobiltelefoner eller datorer.

I nästa del resonerar vi om vad de resultat som presenterats kan betyda för exempelvis lärare och skolverksamheter.

## DISKUSSION OCH REFLEKTION

Dynamiska och interaktiva digitala verktyg som GeoGebra erbjuder en rad matematiska funktioner och visualiseringsmöjligheter som ser ut att bli allt viktigare för att elever ska kunna ta till sig matematikundervisningen och utveckla sina matematiska förmågor (ex. Markkanen, 2021). Flera lärare som deltagit i projektet har också beskrivit att elever som vanligtvis är tysta och relativt passiva under matematiklektionerna blivit mer engagerade i diskussioner och arbetsuppgifter när klassen fått arbeta med GeoGebra i smågrupper. Matematikämnet har samtidigt en lång tradition och inarbetad lärarpraktik (Kemmis m.fl., 2014) som utvecklats över lång tid och bär på etablerade förväntningar på hur matematikundervisning bör gå till och hur matematikens praxis och logos bör komma till uttryck: vilka processer och procedurer som är viktiga för eleverna och hur kunnande och lärande bör uttryckas, benämnas och förklaras. Vår undersökning av vad som händer när lärare använder GeoGebra för att stimulera elevernas matematiska dialog synliggör att det initialt kan uppstå spänningar och osäkerhet när digitala verktyg, med sina nya möjligheter och begränsningar, förs in i klassrummet och påverkar den etablerade undervisningspraktiken. Här i diskussions- och reflektionsdelen vill vi lyfta fram några aspekter och lärdomar från projektet som är viktiga att tänka på när nya digitala verktyg och resurser introduceras i matematikundervisningen. Denna del har därför ett skolutvecklingsperspektiv och förhåller sig friare till den vetenskapliga publikationen (Sjöblom m.fl., 2024).

### **Tydligheten i den pedagogiska idén och det didaktiska upplägget blir viktig**

Resultaten synliggör att lärare behöver vara observanta på vad som hamnar i förgrunden och får fokus i läraaktiviteterna och vad som riskerar att trängas undan och hamna i bakgrunden. Är det den matematiska förståelsen (logos) som hamnar i centrum för elevernas uppmärksamhet och lärande, eller fastnar de i ett mer praxisorienterat fokus och lärande kring det nya verktyget och dess funktioner? Analyserna från projektet synliggör att tydligheten i den pedagogiska idén och det didaktiska upplägget blir extra viktig och att lärare behöver rikta elevernas blick mot matematiken i läraaktiviteten när de introducerar nya digitala verktyg eller funktioner. Om detta inte görs riskerar det matematiska innehållet och lärandet att hamna i skymundan. En bidragande orsak och utmaning är att elever (och lärare) inte lika tydligt kan luta sig mot inarbetade arbetssätt och rutiner för hur matematik bör gå till och uttryckas; att det uppstår en översättningsproblematik (jmf. translation, Kress, 2010) när de använder och uttrycker sitt kunnande med nya verktyg och resurser. Erfarenheter från projektet pekar mot att lärare kan minska risken att matematiken hamnar i skymundan genom att skapa arbetsuppgifter med ett tydligt matematiskt problem och att ställa frågor till eleverna som riktar fokus mot det matematiska innehållet.

## **Digitala verktyg behöver ses som en del av hela lärandemiljön**

Lärarna behöver också vara observanta på vem och vad som inkluderas eller exkluderas i läraaktiviteten och vara medvetna om att den fysiska och sociala organisationen i klassrummet är centrala för hur arbetet med det digitala verktyget faller ut. Resultaten synliggör att de digitala verktygen och läraaktiviteterna är en del i klassrummets och undervisningens totala och multimodala lärandemiljö (Kress, 2010). Elevernas placering i klassrummet och framför skärmen, grupsammansättningen och vem som får kontroll över det digitala verktyget är exempel på aspekter som i vår studie påverkat elevernas möjligheter att engagera sig och lära genom "digitala" lektionsaktiviteter i grupp. Lärare behöver vara uppmärksamma på vilka verktyg, resurser och möjligheter att använda och uttrycka kunskande som olika elever faktiskt får tillgång till och kan använda sig av. En rimlig tolkning av resultaten är att lärare kan behöva vara extra tydliga kring, och även justera designen och organiseringen av den "digitala" lektionsaktiviteten. Samt ibland erbjuda eller påminna om andra (analoga eller digitala) verktyg och resurser som eleverna kan behöva för att engagera sig och lära genom aktiviteten. Å andra sidan visar resultatet att det finns elever som väljer att ignorera det digitala verktyget och i stället lösa uppgiften med verktyg och procedurer som de känner till sedan tidigare (papper, penna och miniräknare). De missar då ett tillfälle att lära sig hantera en typ av digitala verktyg som de kommer att möta i matematikundervisningen och kan bidra till deras matematiska utveckling och lärande (ex. Markkanen, 2021). Även ur denna aspekt är det därför viktigt att lärare designar uppgifter och funderar på hur de kan utnyttja digitala och analoga resurser för att skapa lärandemiljöer som utmanar eleverna att utveckla den praxis och logos de behöver för sin fortsatta utveckling inom matematik (Chevallard, 2006).

## **Nya verktyg utmanar den etablerade undervisningspraktiken**

Resultaten visar att exempelvis lärare, skolutvecklare och forskare behöver vara vaksamma på de problem och oönskade effekter som kan uppstå när digitala verktyg som GeoGebra förs in och får en mer central roll i matematikundervisningen. Men uppmärksamheten behöver även riktas mot de möjligheter sådana verktyg erbjuder. Erfarenheterna från projektet synliggör exempelvis att med ett bra och genomtänkt lektionsupplägg kan digitala verktyg användas för att stimulera den typ av matematisk dialog och interaktion som är viktig för elevernas lärande och utveckling (Sjöblom, 2022). En sådan undervisning kan balansera upp de risker för ökat ensamarbete som uppmärksammats i tidigare forskning om satsningar där alla elever fått tillgång till digitala verktyg (ex. Grönlund, 2014; Wennås Brante & Godhe, 2021). Projektet synliggör samtidigt att även i grunden positiva möjligheter kan tvinga oss (lärare, forskare m.fl.) att omförhandla och fundera över undervisningspraktikens föreställningar om hur matematik och matematikundervisning bör gå till. Digitala verktyg som GeoGebra erbjuder andra möjligheter och begränsningar än exempelvis pennan, arbetsboken, miniräknaren och fysiska laborationsmaterial.

Att använda sådana verktyg innebär därför att någon form av "översättning" (Kress, 2010) och anpassning av procedurer och arbetssätt behövs – och att de tecken på kunnande, lärande och engagemang som eleverna producerar kommer att se delvis annorlunda ut. Ett tydligt exempel i materialet är vissa elevers nästan tysta samarbete kring det digitala verktyget. Hur ska vi förstå och förhålla oss till en sådan interaktion?

Det är inte en matematisk dialog där eleverna använder och övar sig på att hantera explicita och matematiska begrepp verbalt och som lärarna relativt enkelt kan följa. Men det är kanske ett exempel på en annan slags matematisk kommunikation och meningsskapande där elever interagerar både med varandra och det digitala verktyget? Något som betonas inom många nyare perspektiv på lärande (ex. Damşa m.fl., 2019; Orlikowski, 2007) är att materiella resurser och verktyg är inflyttade och spelar en aktiv roll i människors aktiviteter, interaktion och lärande. I takt med att de digitala verktygen blir allt kraftfullare och svarar mer direkt, exempelvis genom AI-baserade chattfunktioner och adaptiva läromedel, är det inte osannolikt att deras inflyttande i elevers interaktion och lärande kommer att bli allt tydligare. En fråga vi behöver ställa oss är vilken typ av interaktion och dialog som elever och lärare då behöver för att matematikundervisningen ska bli så bra som möjligt – och hur vi når dit.

### **Förändringar i undervisningspraktiken förutsätter lärande**

Resultat, erfarenheter och utvärderingar från projektets olika faser och cykler visar att samarbetet mellan lärare från olika skolor, forskare och vetenskapliga utvecklingsledare bidragit till ett fördjupat lärande, nytt kunnande och undervisningsutveckling (McKenney & Reeves, 2014). Enkäter och diskussioner pekar mot att deltagarna utvecklat sina sätt att prata om undervisning och digitala verktyg, vad de gör i undervisningen och hur de relaterar till elever, verktyg och varandra. Dessa erfarenheter ligger i linje både med forskning som argumenterar för att lärare behöver lära, utveckla och förändra sin praktik tillsammans (ex. Kemmis m.fl., 2014) och undersökningar som visat att lärare i Malmö i hög grad vill lära sig använda digitala verktyg tillsammans med kollegor i den egna skolkontexten (Ideland & Ollinen, 2022, 2024). Många lärare i projektet uttryckte att de hade velat lära sig mer om funktionerna i GeoGebra innan de började använda verktyget i sin undervisning. Under projektets gång blev det samtidigt tydligt att lärarna även hade ett behov av att, utifrån sitt ämnesdidaktiska kunnande, diskutera hur de nya funktionerna och möjligheterna passar och fungerar i olika undervisningssituationer (Bueno, 2021; Ideland & Ollinen, 2022; Ollinen, 2019). Projektet stärker bilden av att lärare behöver arbeta, testa och tillsammans med sina kollegor (och elever) fundera på hur de kan förändra sin praktik – för att användningen av nya digitala verktyg ska kunna integreras och anpassas till specifika undervisningssituationer på ett sätt som stärker undervisningen och elevernas lärande.

### **Samarbete kan stärka skolans vetenskapliga grund och beprövade erfarenhet**

Enligt skollagen (SFS 2010:800) ska utbildningen vila på vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet. I det här projektet har vi haft förmånen att få till ett samarbete mellan matematiklärare på två skolor, med ett viktigt stöd från deras skolledare och forskare från både Malmö universitet och Malmö stad (Pedagogisk inspiration, Pi). Genom att utnyttja deltagarnas olika kompetenser har projektet bidragit till ett lärande som varit viktigt för både lärare och forskare. Exempelvis har de videoinspelningar av undervisningen som forskarna hjälpt till med bidragit till att lärarna fått syn på, och kunnat diskutera och analysera, fenomen som annars är svårfångade och lätta att missa. Samtidigt har lärarnas expertis i klassrummet och resonemang om videoklippen gett information som forskarna inte kunnat få tillgång till på egen hand. De praktiska och teoretiska delarna i upplägget har på så sätt kompletterat varandra och följts åt i forskningsprocessen, vilket är kännetecknande för Educational design research (McKenney & Reeves, 2014). Tyvärr är det inte enkelt att få till stånd lika intensiva, långvariga och djupgående samarbeten på alla skolor och för alla lärare. Vi hoppas att vi med denna text kan sprida erfarenheter och lärdomar som kan vara viktiga för exempelvis matematiklärare och arbetslag som arbetar med att utveckla sin undervisning och verksamhet på vetenskaplig grund. Vår intention är att texten och projektet ska bidra till den kunskapsutveckling och kunskapsdelning mellan lärare, forskare, skolledare och lärarutbildare som behövs för att utveckla skolans och undervisningens vetenskapliga bas (Anderhag m.fl., 2024; SOU 2018:19).



## REFERENSER

- Alexander, R. (2020). *A dialogic teaching companion*, Taylor and Francis Group.
- Anderhag, P., Andrée, M., Björnhammer, S., & Gåfväls, C. (2024). Den praktiska forskningens bidrag till läraryrkets kunskapsbas: en analys av kunskapsprodukter från kollaborativ didaktisk forskning *Pedagogisk forskning i Sverige*, 29(1-2), 31-52.
- Bach, C.C., & Bikner-Ahsbals, A. (2022). Activating mathematical communication competency when using DGE: Is it possible? I U.T. Jankvist, & E. Geraniou (Red.), *Mathematical competencies in the digital era. Mathematics Education in the Digital Era*. 20 (ss. 177-196). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-10141-0\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-031-10141-0_10)
- Bueno, R., Lieban, D. & Ballejo, C. (2021). Mathematics Teachers' TPACK Development Based on an Online Course with Geogebra. *Open Education Studies*, 3(1), 110-119. <https://doi.org/10.1515/edu-2020-0143>
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. I M. Bosch (Red.), *Proceedings of the 4th conference of the European society for research in mathematics education* (ss. 21- 30). CERME 4.
- Damşa, C., Nerland, M., & Andreadakis, Z. E. (2019). An ecological perspective on learner-constructed learning spaces. *British Journal of Educational Technology*, 50(5), 2075–2089. <https://doi.org/10.1111/bjet.12855>
- Fuentes, S. Q. (2009). *The evolution of one teacher's interactions with students working in small groups to improve their communication, self-regulating, and problem-solving skills*. PhD dissertation. Montclair State University.
- Godhe, A.-L., Ideland, J., & Ollinen, K. (2023). Dilemmatic spaces pertaining to digitalisation, equity and increased goal attainment in Swedish schools and preschools. *Pedagogy, Culture & Society*, 1–19. <https://doi.org/10.1080/14681366.2023.2298446>
- Grönlund, Å. (2014). *Att förändra skolan med teknik. Bortom en dator per elev*. Örebro universitet.
- Hennessy, S., Calcagni, E., Leung, A., & Mercer, N. (2021). An analysis of the forms of teacher-student dialogue that are most productive for learning. *Language and Education* 37(2), 186-211. DOI: 10.1080/09500782.2021.1956943
- Hohenwarter, M. (5 Augusti 2024) GeoGebra (Version 6.0.851) [Programvara]. <https://www.geogebra.org/>
- Ideland, J. (2020). *Spelet om musiken: unga musiker spelar digitala musikspel*, [Doktorsavhandling: Göteborgs universitet]. <https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/66461>
- Ideland, J. & Ollinen, K. (2022). *Lärares lärande med digitala verktyg och resurser* [Rapport till grundskoleförvaltningen i Malmö stad]. Tillgänglig för medarbetare i Malmö stad på Komin (se länk)
- Ideland, J. & Ollinen, K. (2024). *Digitaliseringens påverkan på undervisning och lärande* [Rapport till grundskoleförvaltningen i Malmö stad]. Tillgänglig på [pedagog.malmo.se](http://pedagog.malmo.se) (se länk)

- Kemmis, S., Wilkinson, J., Edwards-Groves, C., Hardy, I., Grootenboer, P., & Bristol, L. (2014). *Changing practices, changing education*. Springer Science & Business Media.
- Kress, G. R. (2010). *Multimodality: a social semiotic approach to contemporary communication*. Routledge.
- Markkanen, P. (2021). *Representationer, visualisering och resonemang i geometri: Praktisknära studier i digitala lärmiljöer* [Doktorsavhandling, Örebro universitet]. <https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:oru:diva-88117>
- McKenney, S. & Reeves, T. (2014). I J.M. Spector m.fl. (Red.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (ss. 131-139). Springer. DOI 10.1007/978-1-4614-3185-5\_11
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- Nygård Larsson, P., Bergman, L. & Jakobsson, A. (red.) (2022). *Ämneslitteracitet och inkluderande undervisning*. Lund: Studentlitteratur.
- Ollinen, K. (2019). *Digitala verktyg i en naturvetenskaplig undervisningspraktik: lärarens beskrivningar och hur deras TPACK påverkar undervisningen*. [Licavhandling, Lunds universitet].
- Orlikowski, W. J. (2007). Sociomaterial practices: Exploring technology at work. *Organization Studies*, 28(9), 1435–1448. <https://doi.org/10.1177/0170840607081138>
- Selander, S. (2022). *Designs in and for learning – a theoretical framework*. I L. B. Boistrup & S. Selander (Red.), *Designs in research, teaching and learning: A framework for future education* (ss. 1–22). Routledge.
- Sjöblom, M. (2022). *Promoting mathematical dialogue: students' and teachers' listening, questioning and participation* [Doktorsavhandling, Malmö universitet]. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1628049/FULLTEXT01.pdf>
- Sjöblom, M., Björklund Boistrup, L., Ideland, J. & Ollinen, K. (2024). Tensions in combining two practices: promoting mathematical dialogue using digital tools. *I Quaderni di Ricerca in Didattica, Numero speciale n. 13* (ss. 81-89). G.R.I.M., Dipartimento di Matematica e Informatica, University of Palermo, Italy. [https://sites.unipa.it/grim/quaderno\\_2024\\_numspeg\\_13.htm](https://sites.unipa.it/grim/quaderno_2024_numspeg_13.htm)
- Skollag (SFS 2010:800). Se länk
- Skolverket (2018). *Digitaliseringen i skolan: möjligheter och utmaningar*. <https://www.skolverket.se/download/18.6bfaca41169863e6a65d438/1553968018488/pdf3971.pdf>
- Skolverket (2022a). *Läroplan för grundskolan samt för förskoleklassen och fritidshemmet 2022*. Skolverket. <https://www.skolverket.se/undervisning/grundskolan/laroplan-och-kursplaner-for-grundskolan/laroplan-lgr22-for-grundskolan-samt-for-forskoleklassen-och-fritidshemmet>
- Skolverket (2022b). *Ämne – matematik* [Ämnesplan för matematik på gymnasiet]. Skolverket. Se länk
- Skolverket (29 maj 2024). *Så förändras proven i olika ämnen*. Se länk
- Utbildningsdepartementen (SOU 2018:19). *Forska tillsammans – samverkan för lärande och förbättring*. <https://www.regeringen.se/rattsliga-dokument/statens-offentliga-utredningar/2018/03/forska-tillsammans--samverkan-for-larande-och-forbattring/>

Wennås Brante, E. & Godhe, A.-L. (2021). Digitala aktiviteter som stöd för literacyutveckling. *Viden Om Literacy*, 29, 48–57.

Willermark, S. (2018). *Digital Didaktisk Design: Att utveckla undervisning i och för en digitaliserad skola* [Doktorsavhandling, Högskolan väst]. <https://hv.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1174749&dswid=1886>